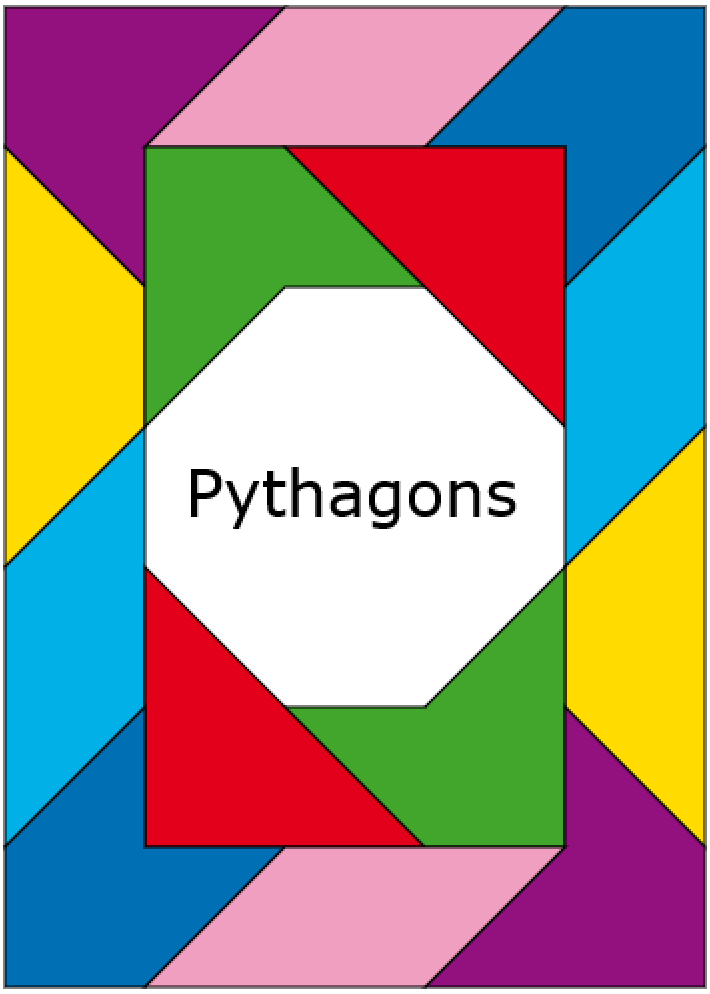
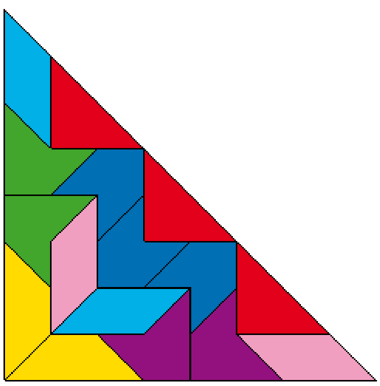


Prijsvraag Pythagoras 2016-2017

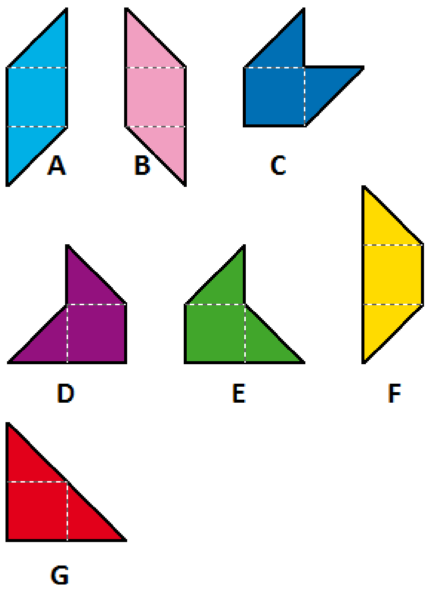


Aad van de Wetering, Driebruggen

Pythagons

Inleiding

In september 2016 schreef *Pythagoras* een prijsvraag uit over *pythagons,* figuren bestaande uit een vierkant en twee halve vierkanten.



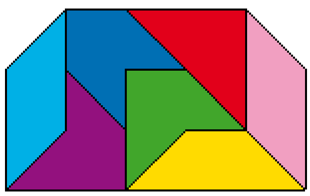
Met pythagons kunnen tweedimensionale velden worden gevuld. Bijvoorbeeld driehoeken, rechthoeken, maar ook grillige vormen. Als de randen maar recht of diagonaal zijn.

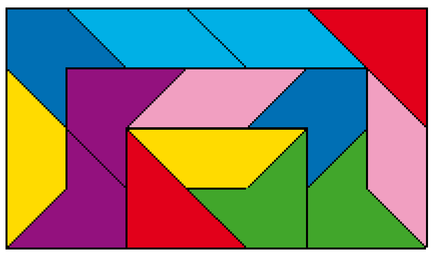
De pythagons zijn eenzijdig, dat wil zeggen dat ze wel gedraaid maar niet omgedraaid mogen worden.

De zijden van gelijke lengte moeten bij elkaar aansluiten. Dus een vierkantzijde tegen een vierkantzijde en een diagonaal tegen een diagonaal.

Links is één set getoond. Bij grote aantallen pythagons moeten zoveel mogelijk complete sets gebruikt worden, eventueel aangevuld met één deelset. Dus bij een veld met bijvoorbeeld 39 pythagons gebruikt men vijf complete sets aangevuld met vier pythagons uit een zesde set.

Een voorbeeld van een vulling met een set in een ruimte van 3 bij 5 minus twee halfjes, en nog een met twee sets in een rechthoek van 4 bij 7:





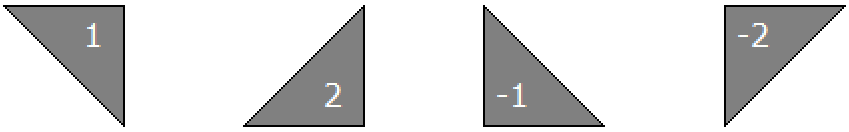
De oppervlakte van een set is gelijk aan 7 x 2 = 14.

In de tekst van de prijsvraag staan wat beweringen op gespannen voet met de waarheid.

- p5 linker kolom midden: *grootste* moet *kleinste* omtrek zijn.
- p5 rechter kolom midden: *Het geval 3 x 2 is inderdaad de configuratie met de kleinste omtrek.* Dit is pertinent onjuist, zie mijn oplossing met omtrek 9,7.
- De tabel bovenaan p6: 1 heeft $4 + 2\sqrt{2} = 6{,}8$; 3 heeft eerdergenoemde $4 + 4\sqrt{2} = 9{,}7$.

Halfjes

Er zijn vier oriëntaties van de halfjes:



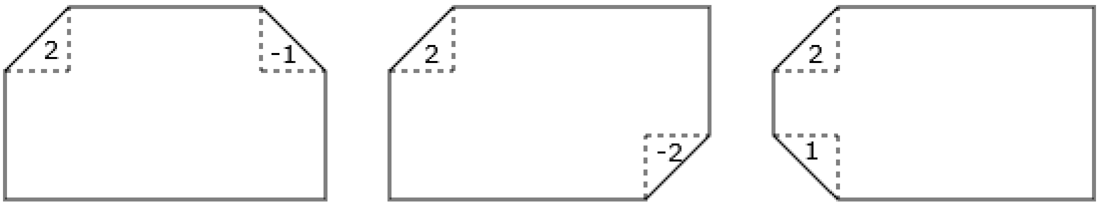
Aan elke oriëntatie is een unieke waarde toegekend. Als de som van de waarden van twee halfjes 0 is kan er een vierkant mee worden gevormd, anders niet.

Elke pythagon heeft zijn eigen *halfwaarde*, de som van de waarden van zijn twee halfjes.

- A, B en C hebben altijd 0
- D, E en F hebben -3, -1, 1 of 3, afhankelijk van de rotatie
- G heeft -4, -2, 2 of 4, afhankelijk van de rotatie

Van de pythagons in een veld met uitsluitend vierkanten moet de som van de halfwaarden 0 zijn. Immers, voor elk halfje moet een complementair halfje gevonden worden. In een rechthoekig veld met bijvoorbeeld 14 vierkanten (één set) moet de halfwaardesom van de pythagons 0 zijn. Helaas is dat niet mogelijk bij één set pythagons, het resultaat is altijd oneven omdat er *drie* pythagons zijn met een *oneven* halfwaarde.

Gebruikt men twee sets pythagons dan is een rechthoek van 4x7 geen probleem, er zijn dan zes pythagons met een oneven halfwaarde, het totaal is even. De sets compenseren elkaar.
Bij het vullen van een veld met 12 vierkanten zal een van de pythagons D, E of F niet gebruikt worden.



Van een grillig veld kan men ook de halfwaarde bepalen volgens dezelfde methodiek. In de figuur linksboven van 3x5 minus 1 is de halfwaarde 2 + -1 = 1. Dat veld kan gevuld worden met een set, er zijn twee oplossingen.
De figuur middenboven heeft halfwaarde 2 + -2 = 0, dat veld kan met een set nooit een oplossing geven.
Rechtsboven zou gevuld kunnen worden vanwege de halfwaarde 2 + 1 = 3, er zijn echter geen oplossingen mogelijk.

In het algemeen geldt de regel:

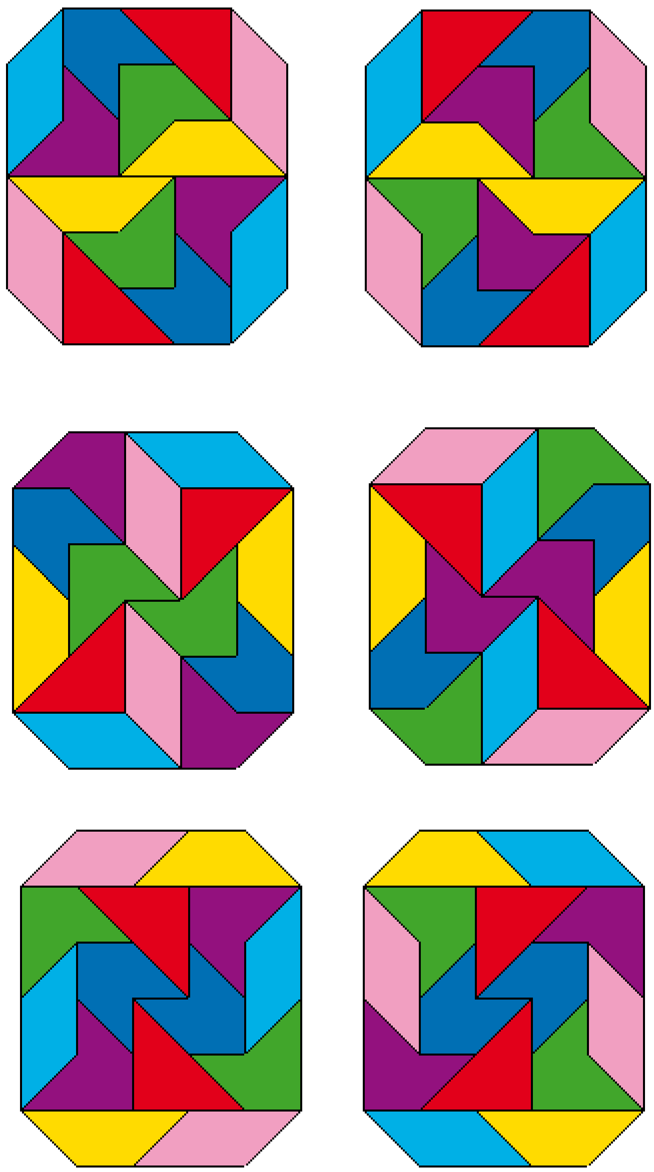
Bij gebruik van een oneven aantal sets pythagons moet de halfwaarde van het veld oneven zijn.
Bij gebruik van een even aantal sets pythagons moet de halfwaarde van het veld even zijn.

Spiegelbeeld

Voor velden waarvan het spiegelbeeld identiek is geldt:

Elke oplossing heeft ook een spiegelbeeldige oplossing. Elke pythagon heeft immers een spiegelbeeld: A en B, D en E, terwijl C, F en G hun eigen spiegelbeeld zijn.

Een illustratie met een veld van 5x6 met halve hoeken:



Alle oplossingen zijn toevallig puntsymmetrisch.

Nieuwjaarsprijsvraag

Deel 1 Kleinste omtrek met 31 sets

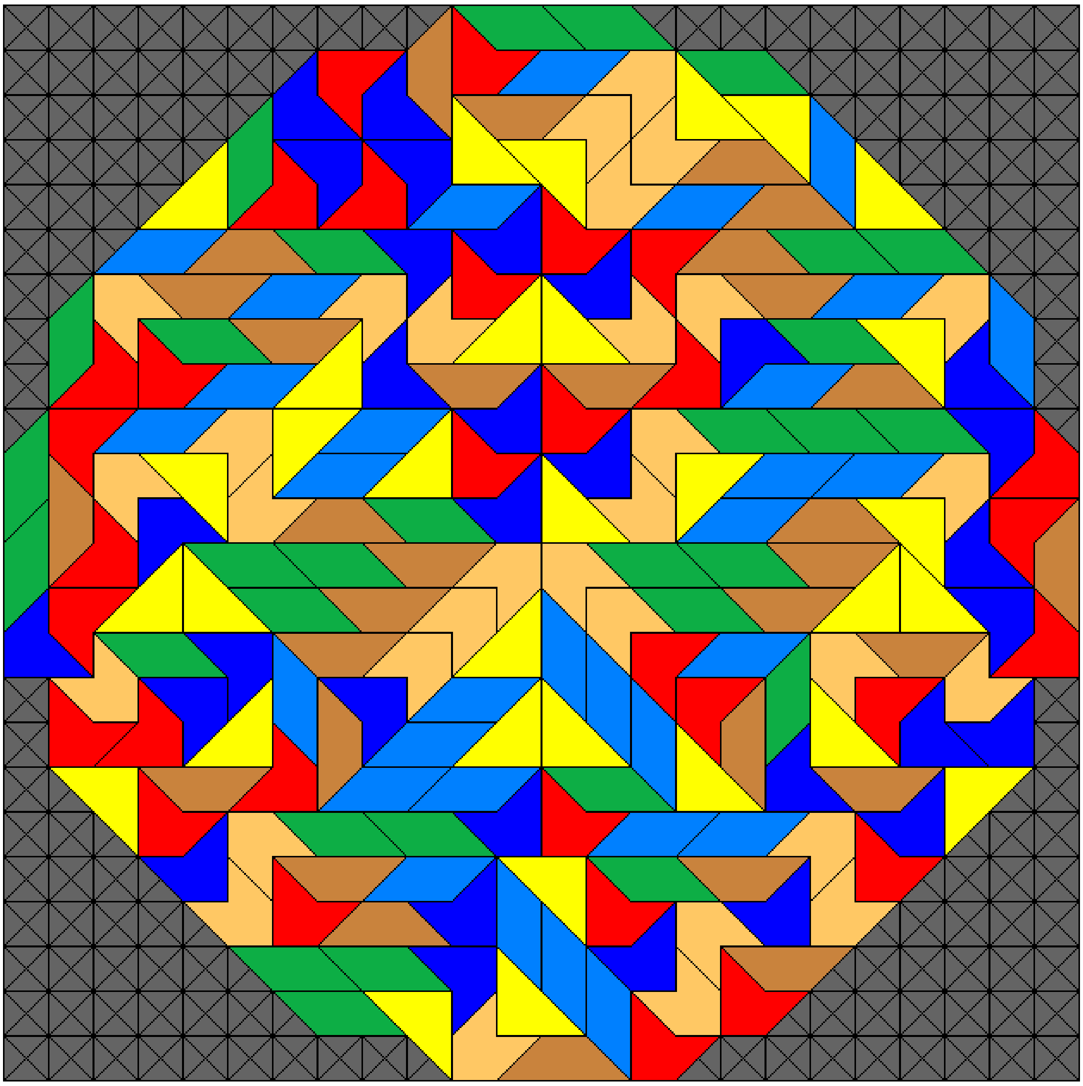
De onbereikbare minimale omtrek van *n* pythagons is een cirkel. De oppervlakte is *2n*, dus 2n = πr^2, dus r = $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$. De omtrek is 2π$\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ = 2$\sqrt{2\pi n}$ = 5,01$\sqrt{n}$.

Een altijd verbeterbare omtrek is die van een vierkant. De zijde is $\sqrt{2n}$, de omtrek dus 4$\sqrt{2n}$ = 5,66$\sqrt{n}$.

Een goede benadering van de kleinste omtrek is het gemiddelde: **5,3$\sqrt{n}$.**

Voor n = 217 geeft dat de waarde 78,1.

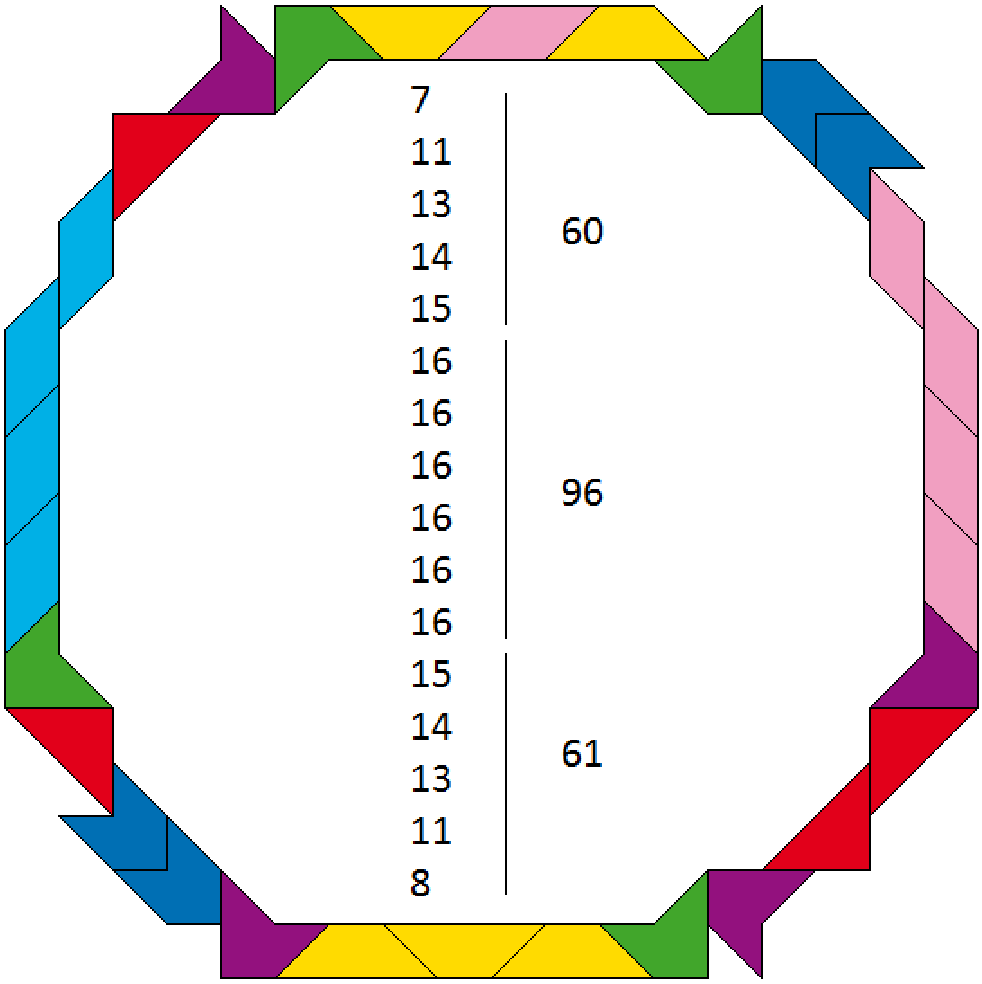
Met onderstaande vulling haalde ik 78,4, niet slecht.



217 pythagons (31 sets) met omtrek 78,4

Deel 2 Kleinste aantal pythagons omcirkelen oppervlakte 217

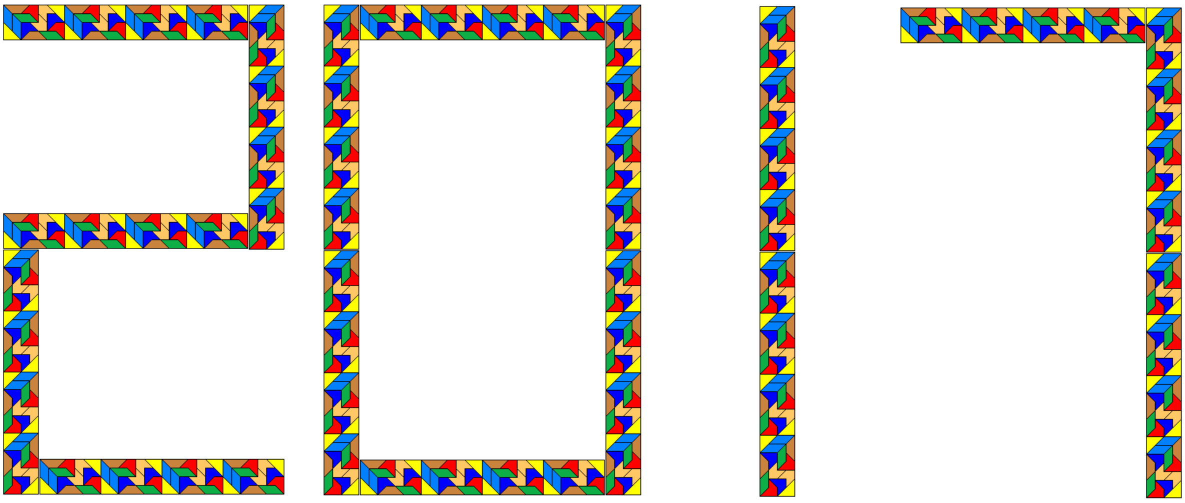
Een cirkel met straal 8,3 heeft als oppervlakte 216,4. Teken een cirkel met die straal en ga met rechte lijntjes en diagonalen zwalkend langs de omtrek ervan. Probeer daarna een mooie vulling van de rand te verkrijgen. Onderstaande figuur oogt tamelijk symmetrisch.



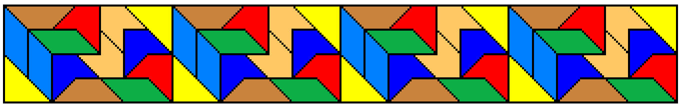
30 pythagons omcirkelen een ruimte met oppervlakte 217

Deel 3 Schrijf 2017 met 217 of meer pythagons

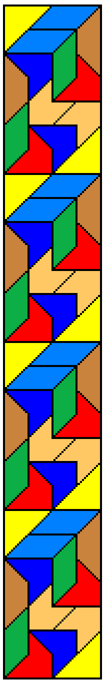
Ik wil graag de poedelprijs.



Samengesteld uit twee rechthoeken:



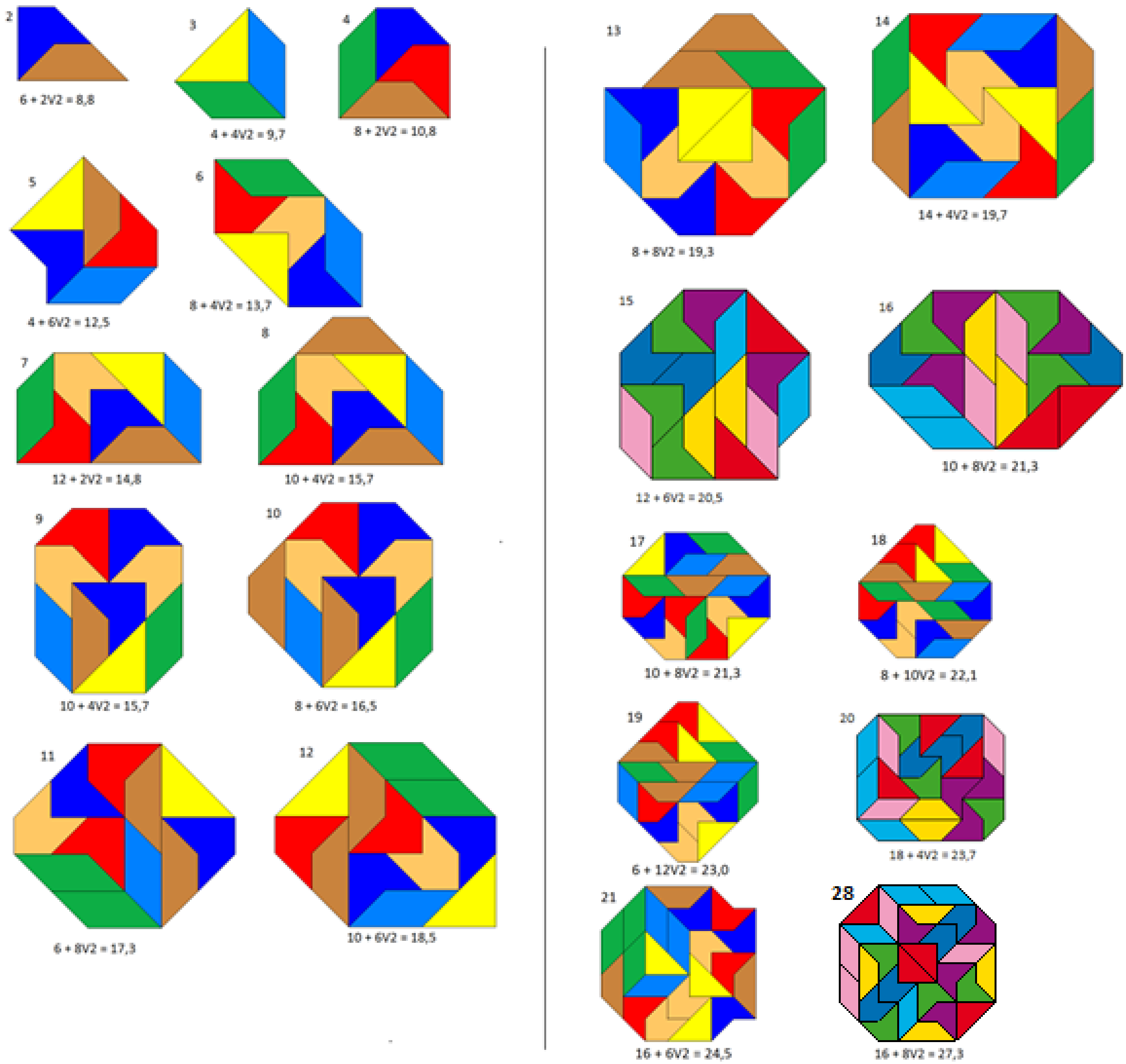
en



16 digitale strepen van elk 8 sets pythagons = 896 pythagons.

Prijsvraag

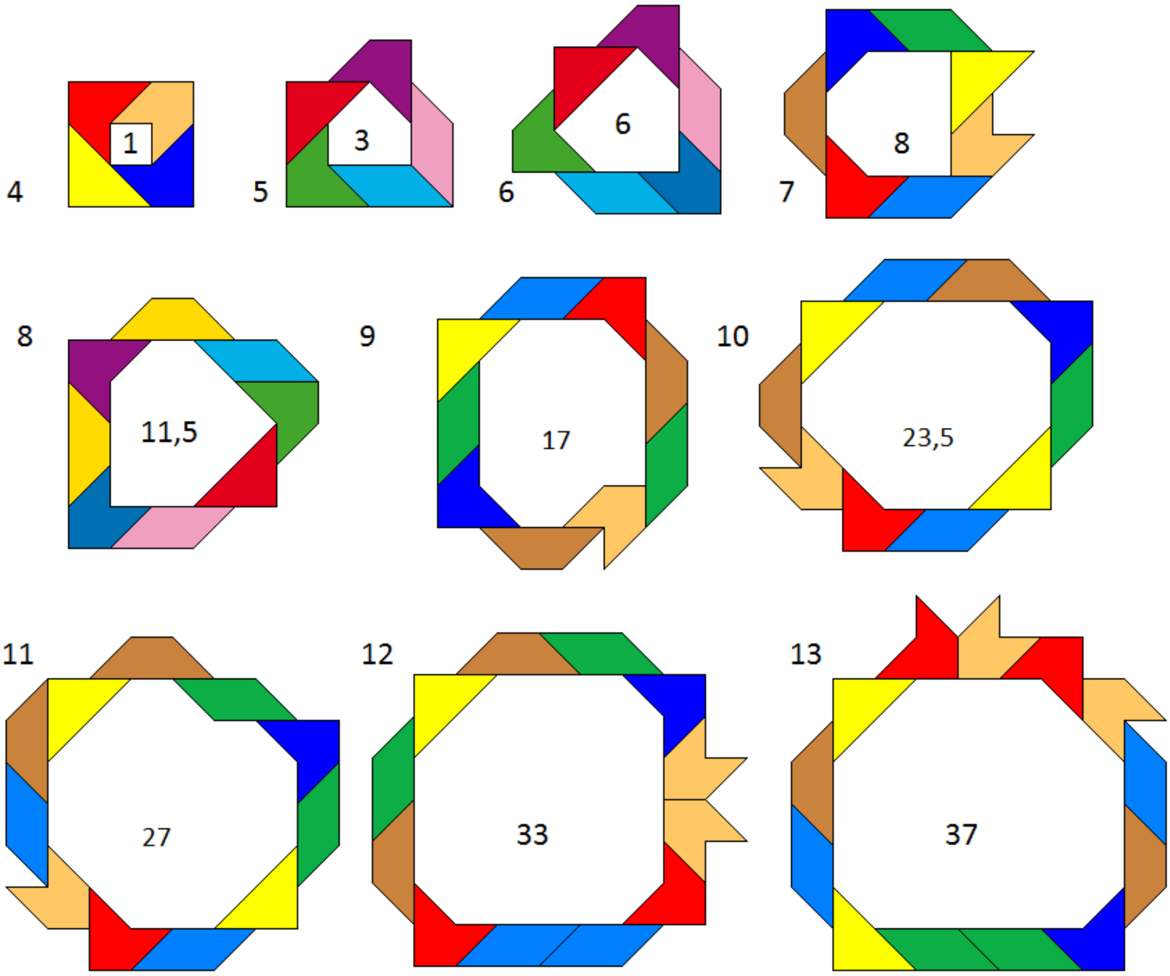
Deel A Kleinste omtrek bij gegeven aantal pythagons



Overzicht uit Excel

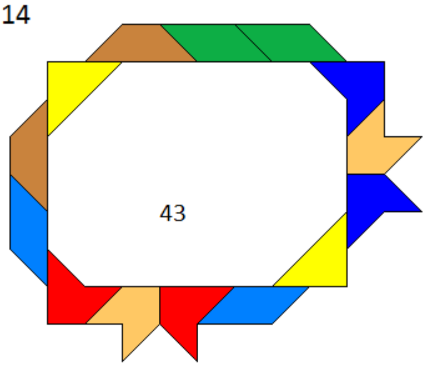
	A	B	C	D	E	F	G
1	Heel	V2	Totaal	Formule	Verschil	Minimum	Verschil
2	6	2	8,8	7,5	1,3	7,1	1,7
3	4	4	9,7	9,2	0,4	8,7	1,0
4	8	2	10,8	10,7	0,2	10,0	0,8
5	4	6	12,5	11,9	0,6	11,2	1,3
6	8	4	13,7	13,1	0,6	12,3	1,4
7	12	2	14,8	14,1	0,7	13,3	1,6
8	10	4	15,7	15,1	0,6	14,2	1,5
9	10	4	15,7	16,0	-0,3	15,0	0,6
10	8	6	16,5	16,9	-0,4	15,8	0,6
11	6	8	17,3	17,7	-0,4	16,6	0,7
12	10	6	18,5	18,5	0,0	17,4	1,1
13	8	8	19,3	19,2	0,1	18,1	1,2
14	14	4	19,7	19,9	-0,3	18,8	0,9
15	12	6	20,5	20,6	-0,2	19,4	1,1
16	10	8	21,3	21,3	0,0	20,0	1,3
17	10	8	21,3	22,0	-0,7	20,7	0,6
18	8	10	22,1	22,6	-0,5	21,3	0,9
19	6	12	23,0	23,2	-0,3	21,8	1,1
20	18	4	23,7	23,8	-0,2	22,4	1,2
21	16	6	24,5	24,4	0,1	23,0	1,5
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28	16	8	27,3	28,2	-0,9	26,5	0,8

Deel B Grootste oppervlakte omsingeld

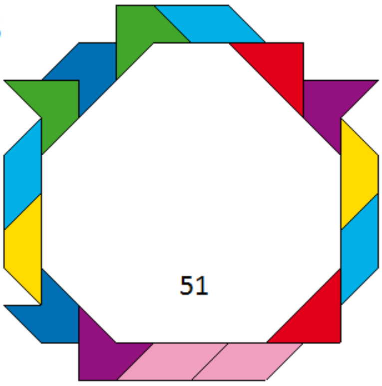


(wordt vervolgd)

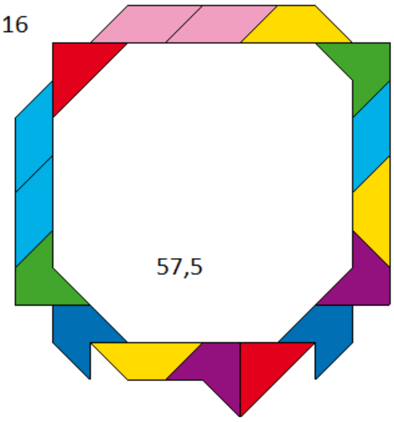
14



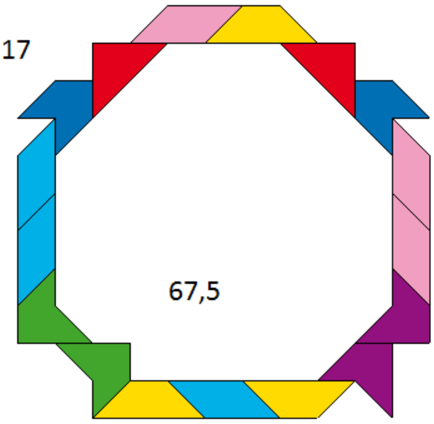
15



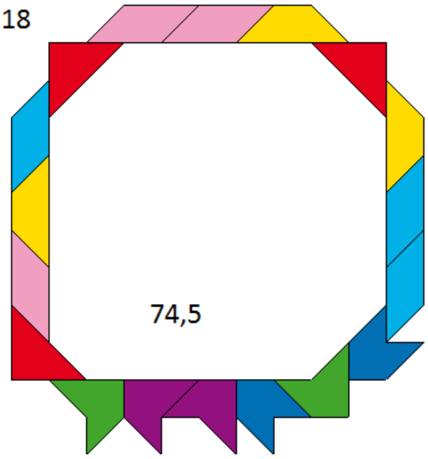
16



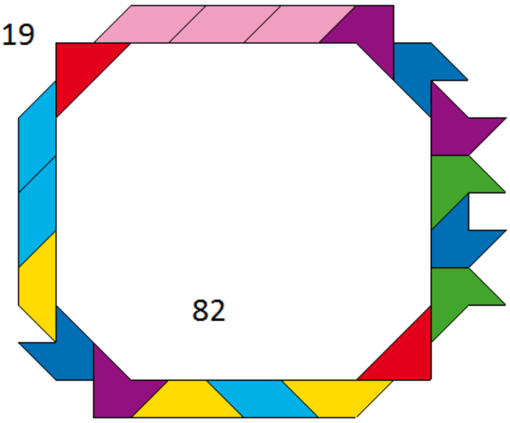
17



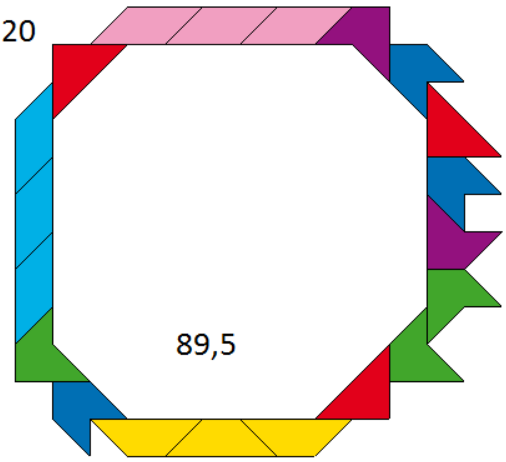
18



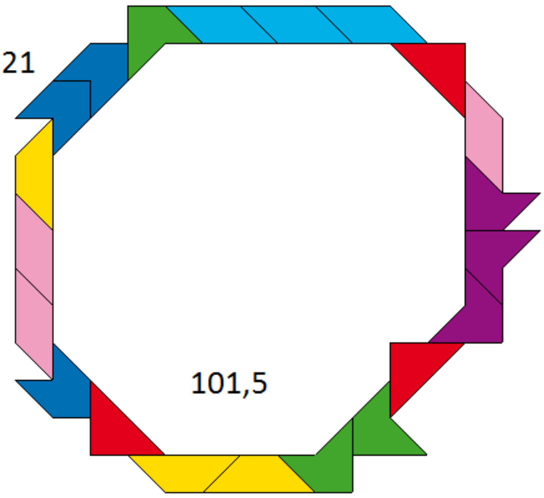
19



20



21



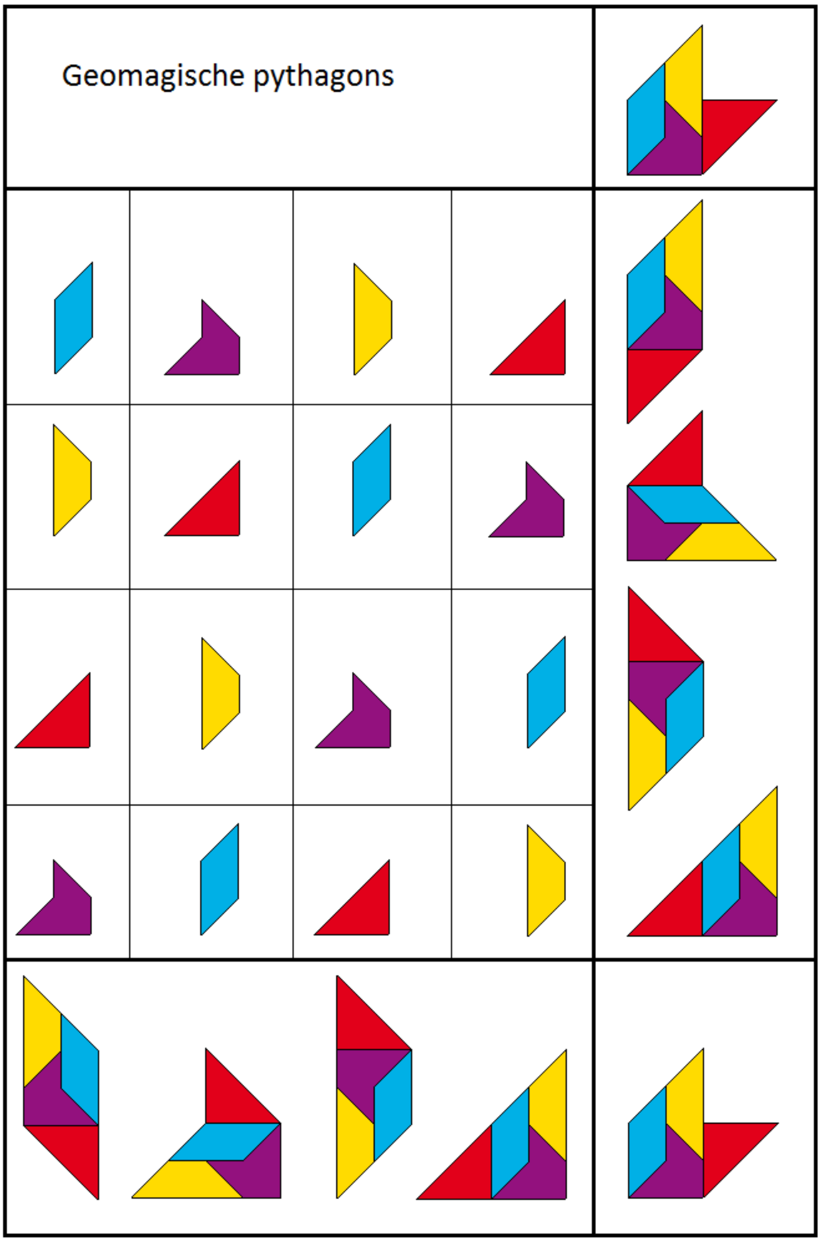
Overzicht:

	A	B
1	Omsluiting	Verschil
2		
3	0	
4	1	1
5	3	2
6	6	3
7	8	2
8	11,5	3,5
9	17	5,5
10	23,5	6,5
11	27	3,5
12	33	6
13	37	4
14	43	6
15	51	8
16	57,5	6,5
17	67,5	10
18	74,5	7
19	82	7,5
20	89,5	7,5
21	101,5	12

Deel C Structuren en patronen

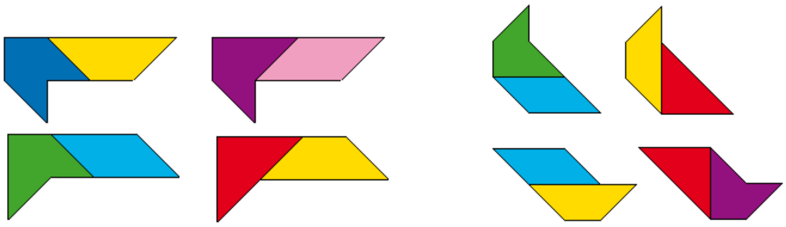
Geomagie

Vier basispythagons vormen alle pythagons tweemaal vergroot. In twee gevallen is spiegeling toegepast.

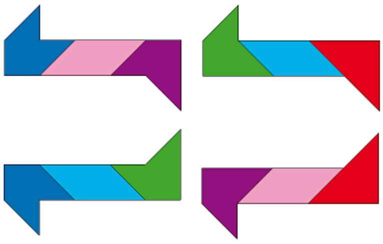


Congruentie

Congruente paren zijn er volop. Enkele voorbeelden:

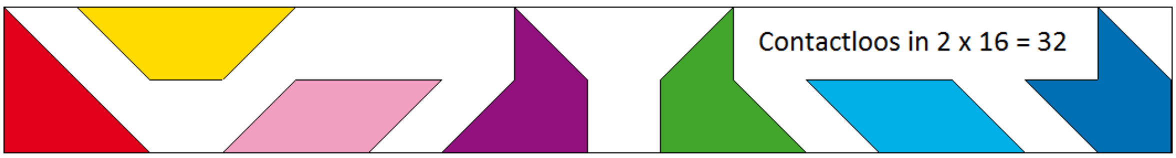


Trio’s zijn erg schaars, ik vond er slechts twee:

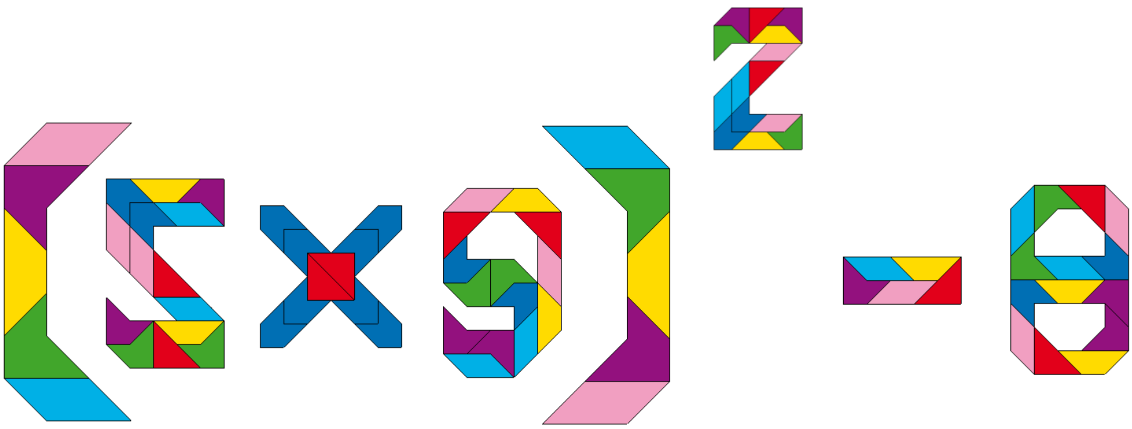


Contactloos

Kleinste oppervlakte 32:

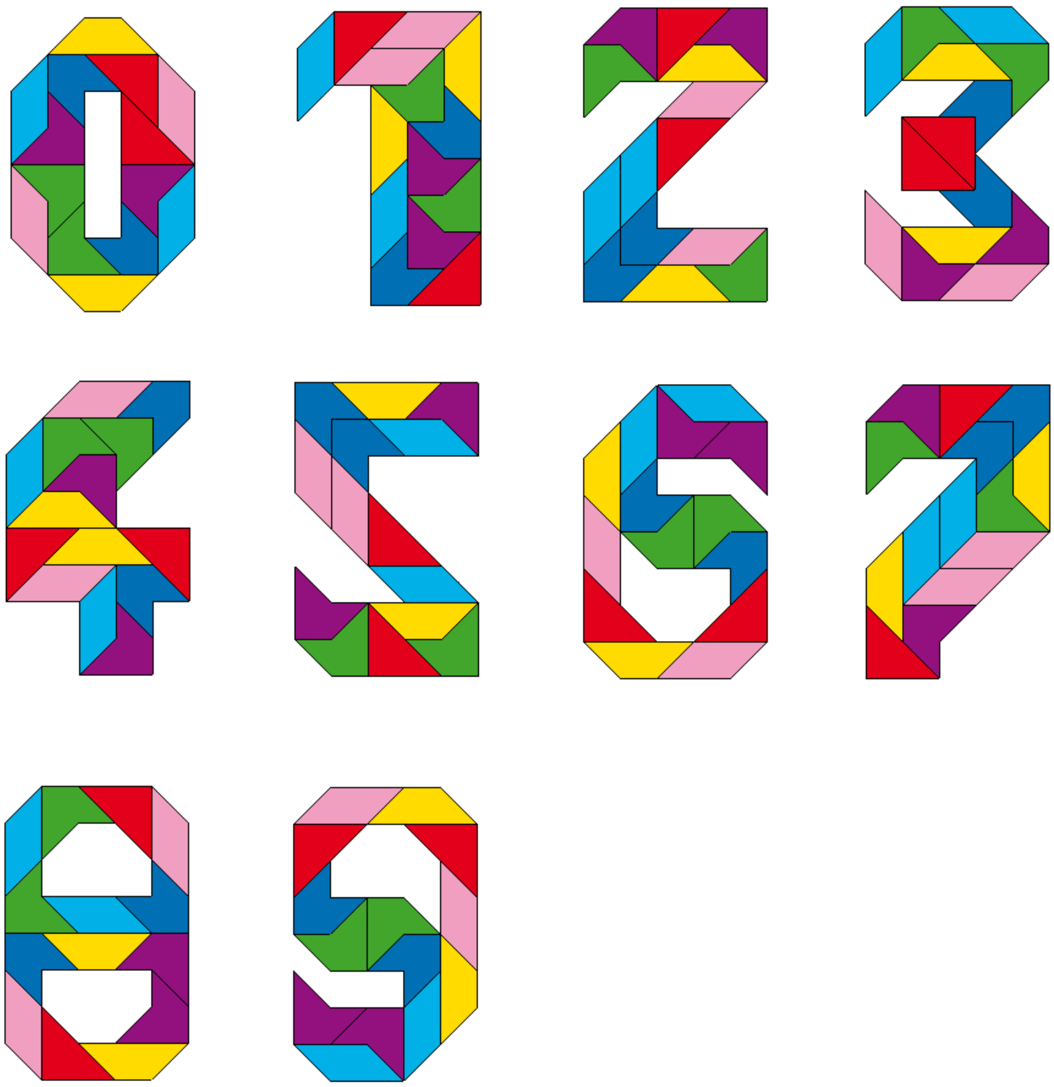


2017

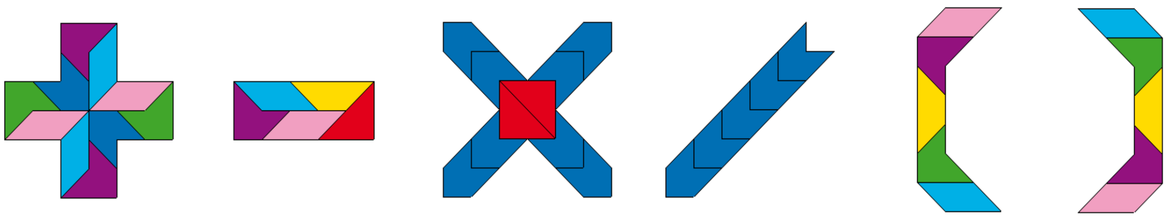


Cijfers

Elk cijfer gevormd met twee sets in een ruimte van vijf breed en acht hoog. De fraaie symmetrie van de 3 is opvallend. De cijfers 2 en 5 zijn congruent, evenals 6 en 9.

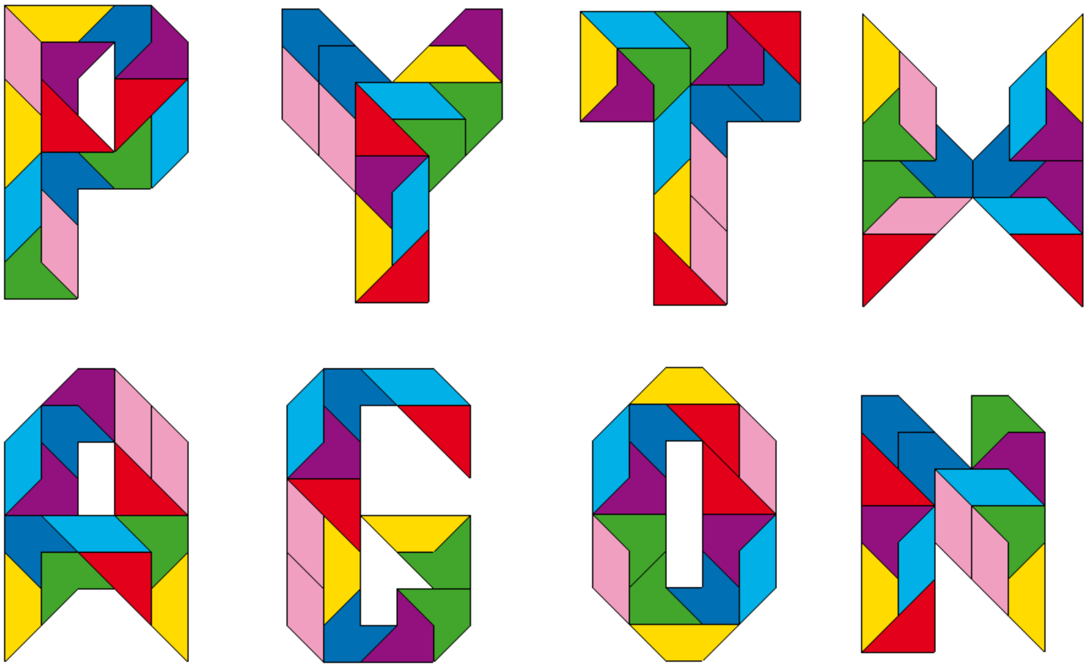


Operatoren, haakjes:



De letters van Pythagon

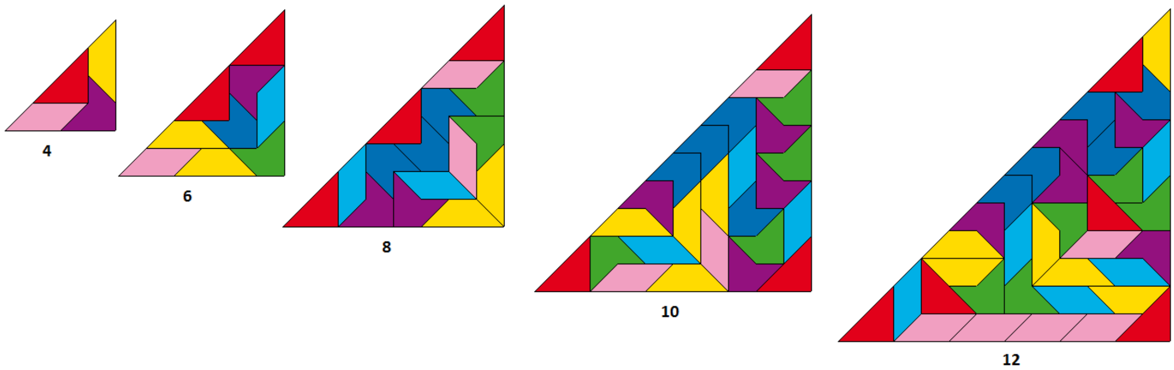
Elke letter gevormd met twee sets. De H is typografisch niet mooi, meetkundig wel door de symmetrie.



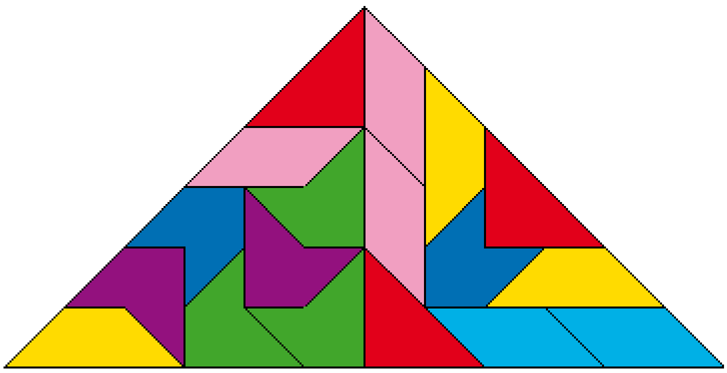
Driehoeken

Driehoeken met rechthoekszijden 4, 6, 8, 10 en 12. Het aantal pythagons is het kwadraat van de zijde gedeeld door 4. De symmetrie langs de diagonaal van de driehoek met zijde 8 is opvallend.

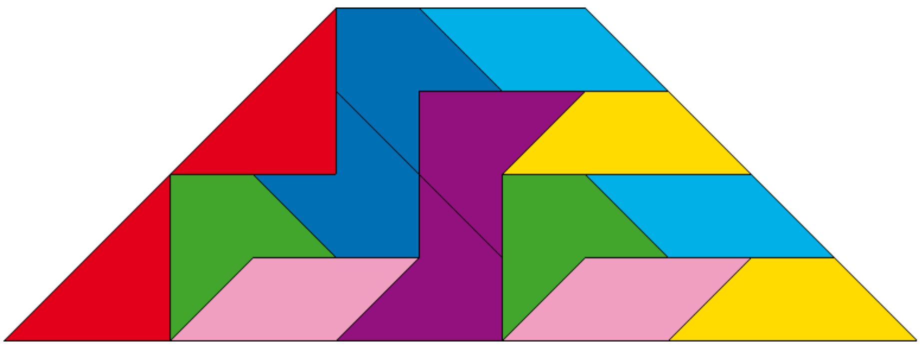
Een driehoek met rechthoekszijde 14 kan niet gevuld worden, de halfwaarde van het veld is even terwijl de halfwaarde van 7 sets oneven is.



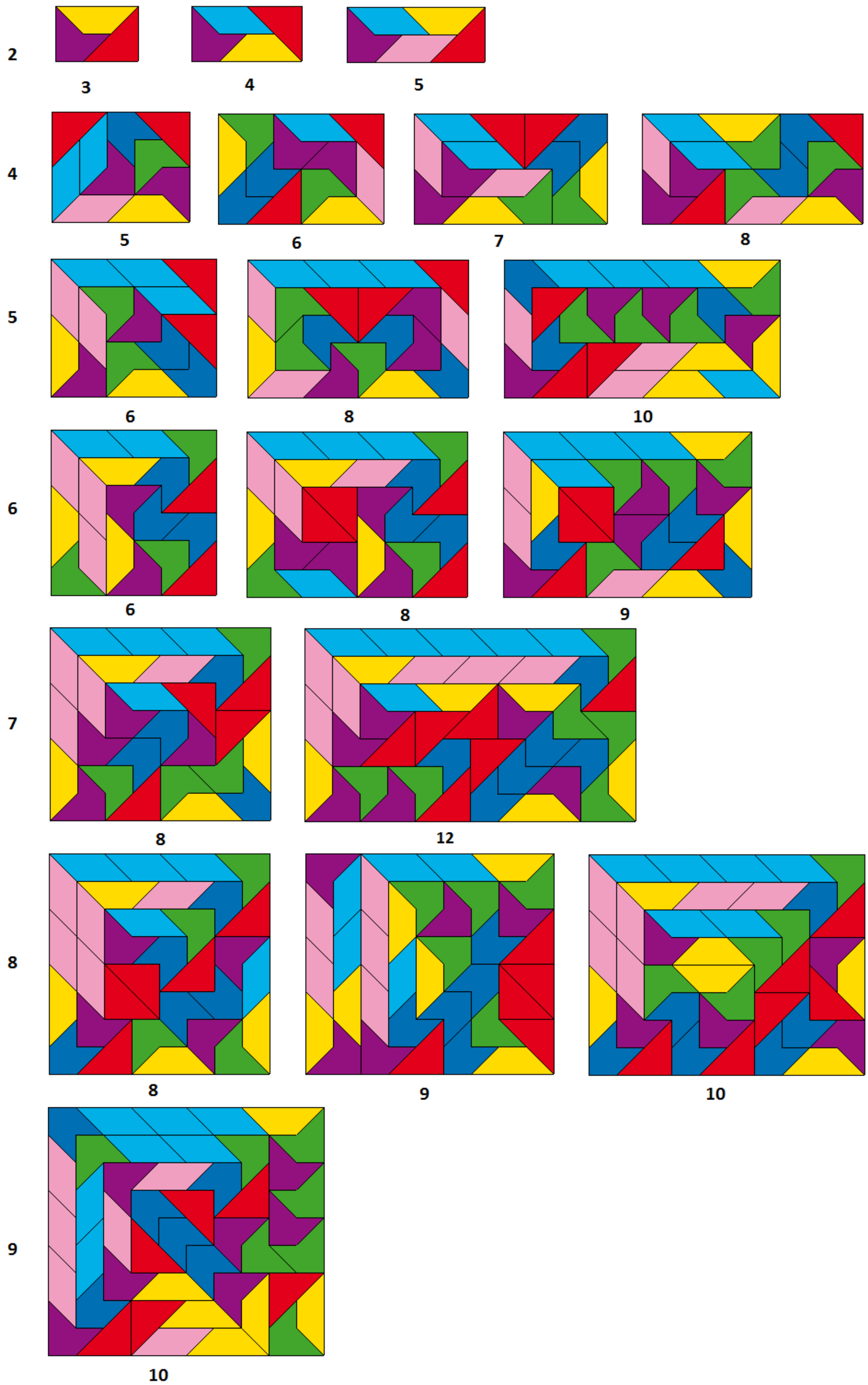
De driehoek kan ook gevormd worden met een gehele schuine zijde, de kleinste is er een met basis 12:



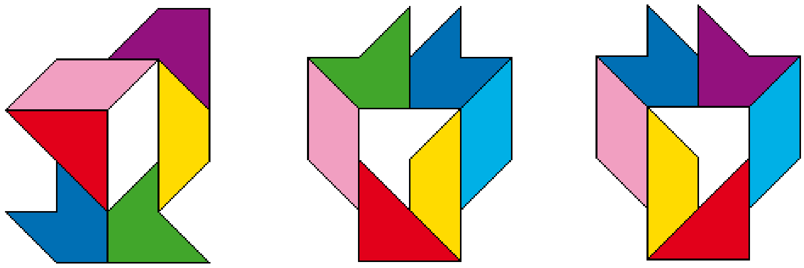
Trapezium

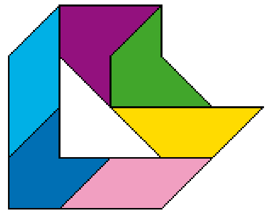


Rechthoeken

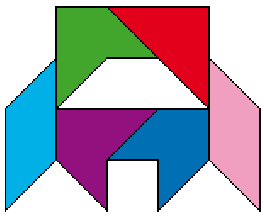


Elke pythagon geheel omsloten door de zes andere

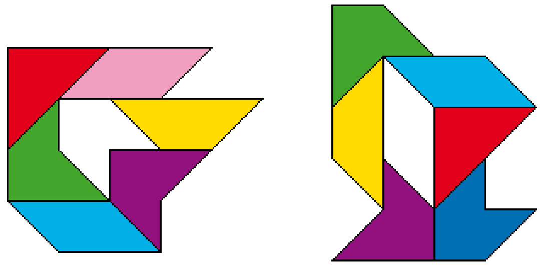




Op omslag *Pythagoras*
september 2016

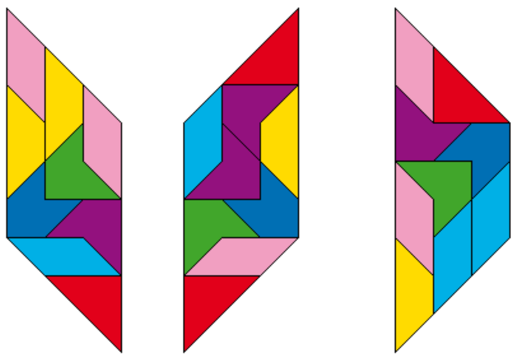


symmetrisch om verticale as

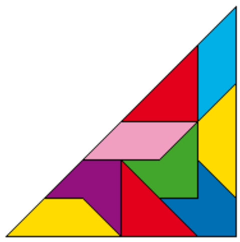


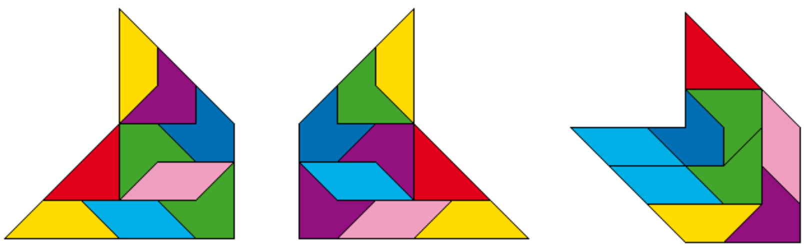
Elke pythagon geheel omsloten door de zes andere.

Alle pythagons drie maal vergroot



Maar twee oplossingen.

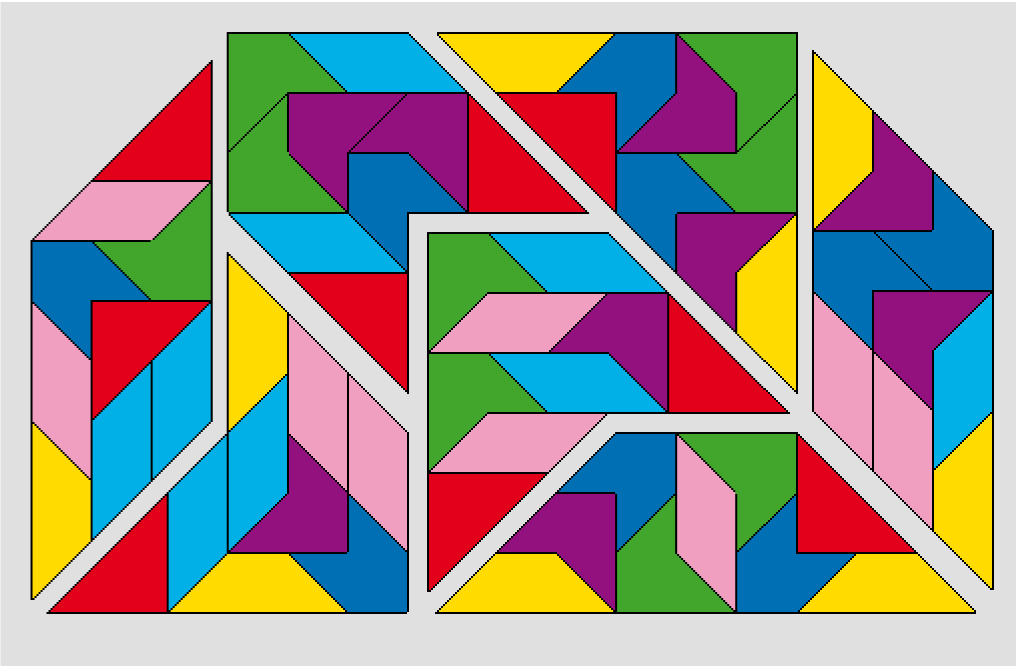




Alle pythagons drie maal vergroot.

Vermenigvuldigen met negen

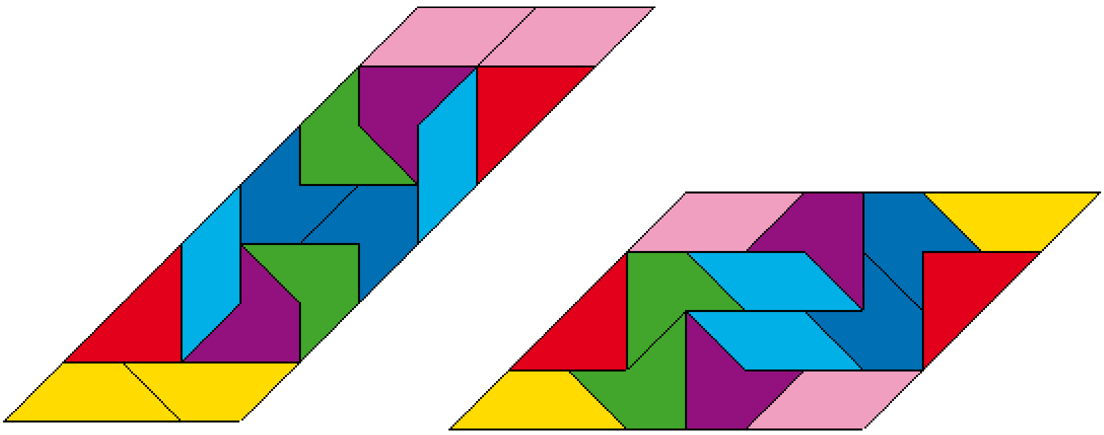
Elke grote pythagon bevat negen pythagons en elke pythagon is negen keer gebruikt:



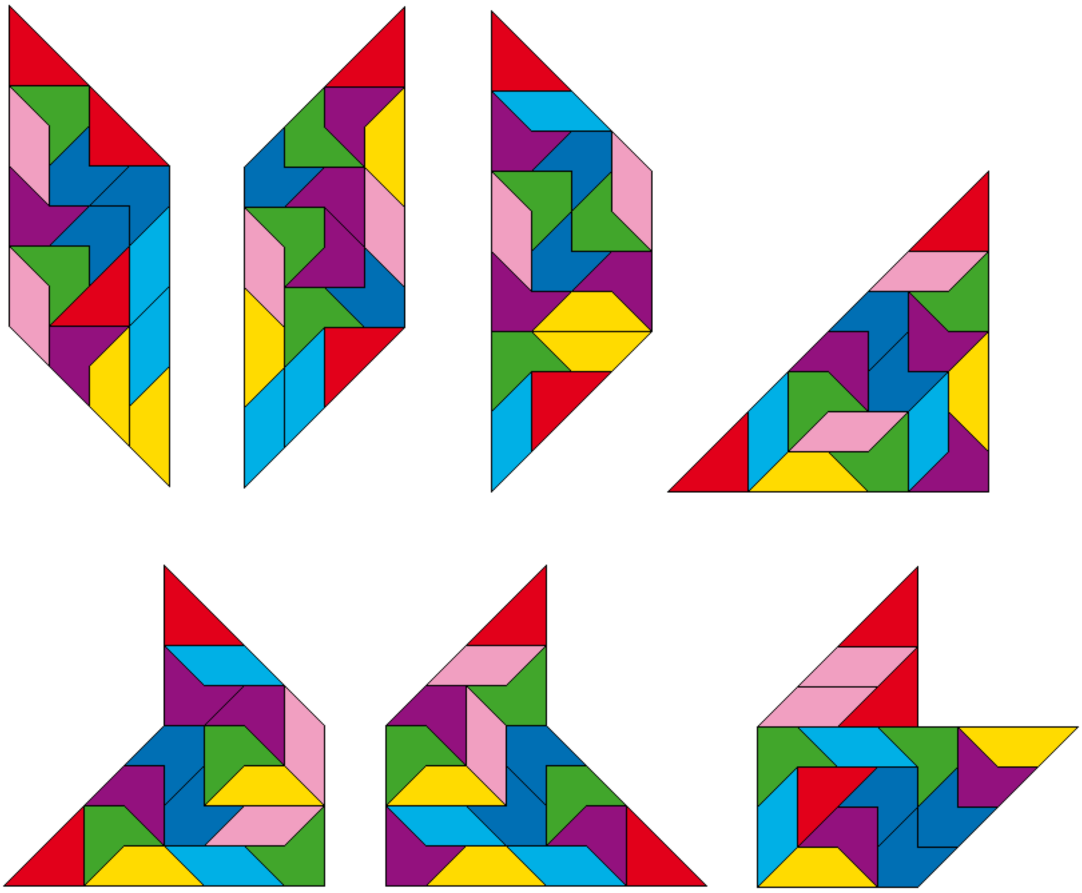
Zodoende kan een veld met *n* sets vergroot worden tot een veld met *9n* sets. Horizontaal en verticaal met factor 3.

Parallellogrammen

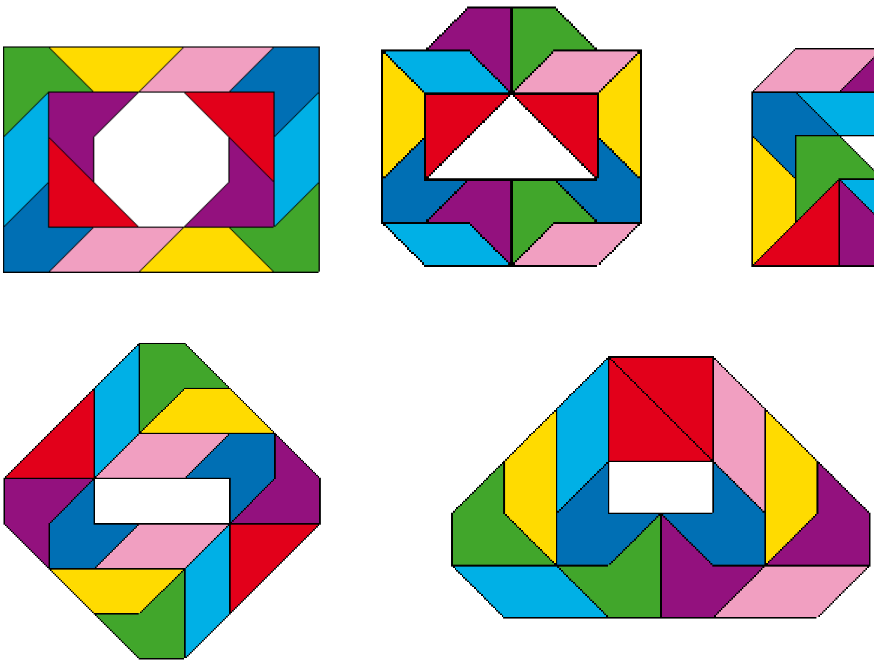
Met twee sets in twee richtingen.



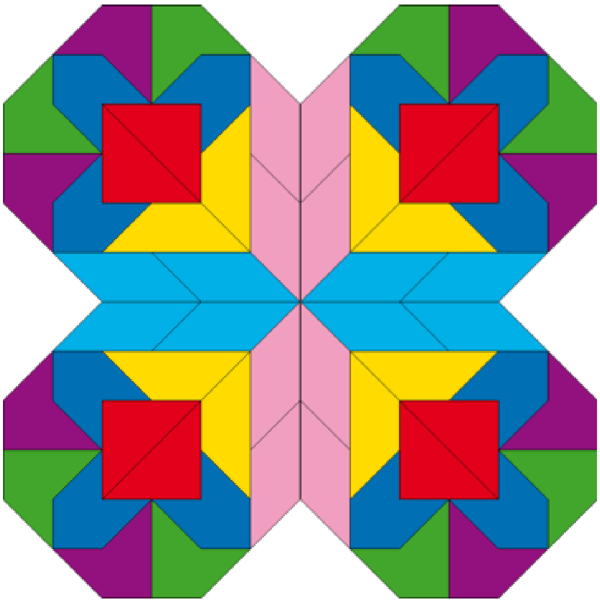
Alle pythagons vier maal vergroot



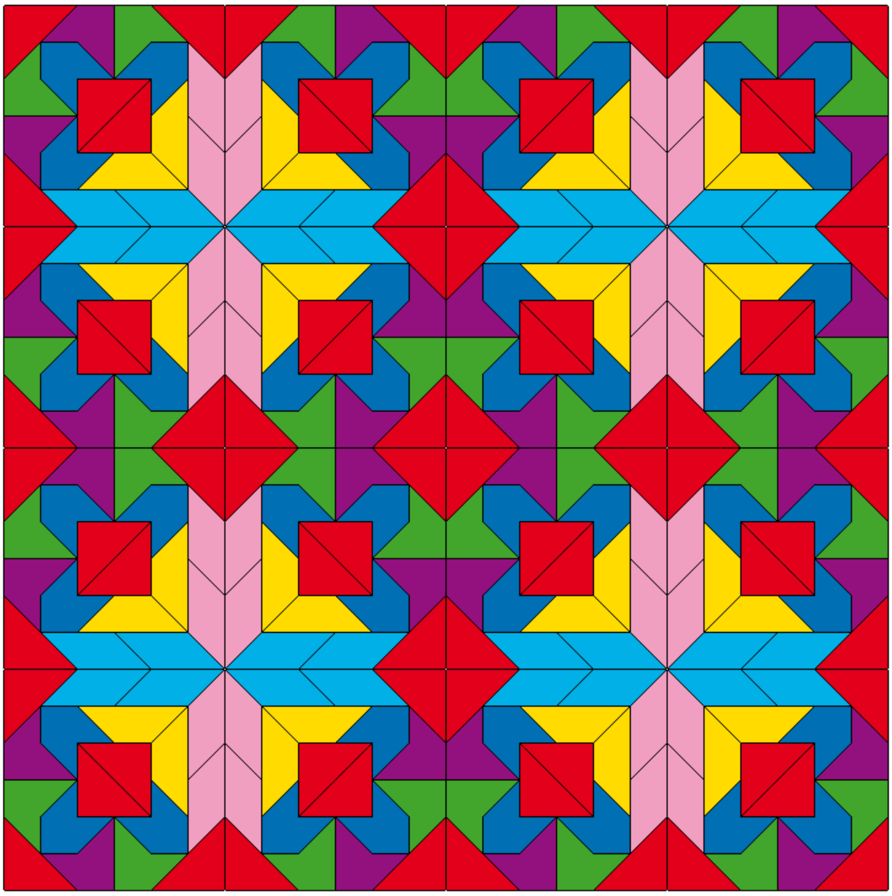
Symmetrie met twee sets



Klavertjevier



Als de inhammen opgevuld worden met pythagons G ontstaat er een fraai behang:



Uitsmijter

Vier sets vormen een achthoek, de \-diagonaal is de symmetrieas.